INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{a}{\sqrt{2}-1}\cdot x+\frac{b}{\sqrt{2}+1},\ a,b\in\mathbb{Z}$.

a) Determinaţi a şi b $\in\mathbb{Z}$, astfel încât punctul $M\left(\sqrt{2}+1,5\right)$ să se afle pe graficul funcţiei f.

b) Cu a şi b determinaţi mai sus găsiţi punctele de pe grafic cu ambele coordonate numere raţionale.

<u>Soluţie:</u>

Condiţia $M\left(\sqrt{2}+1,5\right)\in G_f$ dacă şi numai dacă $f\left(\sqrt{2}+1\right)=5$ 1p

Obţine relaţia $\sqrt{2}(2a+b)+3a-b=0$, a şi b $\in\mathbb{Z}$ 2p

Deduce sistemul $\begin{cases}2a+b=0\\3a-b=5\end{cases}$ 1p

Rezolvă sistemul şi obţine a = 1, b = -2 .... 1p

$N(\alpha,\beta)\in G_f,\ \alpha,\beta\in\mathbb{Q}\Rightarrow\begin{cases}\alpha-2=0\\\alpha-\beta+2=0\end{cases}$ 1p

Determină punctul N (2, 4) 1p

2. Fie funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x+1}{x}$.

a) Să se calculeze f(1) · f(2) · …… · f(2013).

b) Demonstraţi că $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}<0$, oricare ar fi x, y$\in(0,+\infty)$, $x\neq y$.

c) Stabiliţi monotonia funcţiei f.

<u>Soluţie:</u>

a) Calculează f(1), f(2), …… , f(2013) 1p
Găseşte f(1) · f(2) · …… · f(2013) = 2014 .... 1p

b) Obţine $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{y-x}{xy(x-y)}$ 2p

Deci $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=-\frac{1}{xy}<0$, oricare ar fi x, y$\in(0,+\infty)$, $x\neq y$ 1p

c) Din $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}<0$ oricare ar fi x, y$\in(0,+\infty)$, $x\neq y$, rezultă că funcţia f este strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$ 2p

3. a) Pe un lac creşte o plantă care îşi dublează numărul de frunze zilnic. După 10 zile planta are 2048 de frunze. Să se determine numărul de frunze pe care l-a avut planta în a 5-a zi.

b) Într-un amfiteatru sunt 30 de rânduri de scaune, astfel încât pe fiecare rând sunt cu două locuri mai mult decât pe rândul din faţa sa. Ştiind că pe al doilea rând sunt 18 scaune, să se determine numărul total de scaune din întreg amfiteatrul.

Soluţie:

a) Pe „mers invers" stabileşte câte frunze avea planta în prima zi.

$2048 \to 1024 \to 512 \to 256 \to 128 \to 64 \to 32 \to 16 \to 8 \to 4$ 1p

Aşadar, numărul frunzelor plantei este în fiecare zi un termen al unei progresii geometrice cu primul termen $b_1 = 4$ şi raţia $q = 2$ 1p

În a 5-a zi, planta avea $b_5 = 4 \cdot 2^4 = 64$ frunze 1p

b) În primul rând sunt 16 scaune 1p

Numărul de scaune de pe fiecare rând, începând cu primul, este o progresie aritmetică cu $a_1 = 16$ şi $r = 2$ 1p

Cum $a_{30} = 16 + 29 \cdot 2 = 74$, rezultă $S_{30} = \dfrac{(16+74)\cdot 30}{2}$ 1p

Numărul total de scaune din tot amfiteatrul este 1350 .... 1p

4. Fie triunghiul ABC cu $M \in (BC)$ astfel încât $\overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{MB}$.

Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

Soluţie:

Figura 1p

Obţine $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$ 1p

Din $\overrightarrow{MC} = -3\cdot\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{CM} = -\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ 1p

$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ 1p

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ 1p

$2\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ 1p

Deduce $\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEŢEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (2m + 1)x + m^2 - 4m + 5$ şi A punctul de intersecție al graficului funcției f cu axa (Oy). Determinați valoarea minimă a lungimii segmentului [OA].

<u>Soluție:</u>

$G_f \cap (Oy) \Rightarrow x = 0$ şi $y = f(0) = m^2 - 4m + 5$ 1p

Punctul de intersecție este $A(0, m^2 - 4m + 5)$ 1p

Lungimea segmentului [OA] este $|OA| = |m^2 - 4m + 5|$ 1p

Dar $m^2 - 4m + 5$, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$ $(\Delta < 0)$ 1p

$|OA| = |m^2 - 4m + 5|$, iar $\min(m^2 - 4m + 5) = -\dfrac{\Delta}{4a} = 1$ 2p

Aşadar, valoarea minimă a lungimii segmentului [OA] este 1 .... 1p

Observație:

Ultimele 4 puncte se acordă şi dacă scrie $|OA| = |m^2 - 4m + 5| = (m - 2)^2 + 1 > 0$, minimul expresiei atingându-se pentru $m = 2$. Valoarea minimă este 1.

2. Fie funcția $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Demonstrați că $f\left(\dfrac{4+9}{2}\right) > \dfrac{f(4)+f(9)}{2}$.

b) Demonstrați că $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$, $a \neq b$.

<u>Soluție:</u>

a) $f\left(\dfrac{4+9}{2}\right) > \dfrac{f(4)+f(9)}{2} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{13}{2}} > \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 13 > \dfrac{25}{2}$ (adevărat) 2p

b) $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > \dfrac{f(a)+f(b)}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{a+b}{2}} > \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}, a, b \in [0, +\infty), a \neq b$ 2p

Inegalitatea este echivalentă cu: $\dfrac{a+b}{2} > \dfrac{a+b+2\sqrt{ab}}{4}$ 1p

$2(a+b) > a+b+2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} > 0$ 1p

Obține $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 > 0$ (adevărat) 1p

3. a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt{x^2 - x - 2} = x - 2$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\left[\log_3(x+1)\right]^2 - 4\log_3(x+1) + 3 = 0$

<u>Soluție:</u>

a) Condiții de existență $\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases}$ 1p

Obține $x \in [2, +\infty)$ 1p

Unica soluție a ecuației este x = 2 .... 1p

b) Condiție de existență: x + 1 > 0 $\Rightarrow$ $x \in (-1, +\infty)$ 1p

Notează $\log_3(x+1) = t \in \mathbb{R}$ 1p

Obține ecuația $t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 3$ 1p

$\log_3(x+1) = 1 \Rightarrow x_1 = 2; \log_3(x+1) = 3 \Rightarrow x_2 = 26$ 1p

4. Într-o casierie sunt cel mult 35 de bancnote de 5 lei, cel mult 4 bancnote de 100 lei şi cel mult 3 bancnote de 200 lei. Reuşeşte casierița, folosind toate tipurile de bancnote, să plătească:

a) 1000 lei ?

b) 842 lei ?

<u>Soluție:</u>

a) Fie m, n, $p \in \mathbb{N}^*$, numărul bancnotelor de 200 lei, 100 lei şi respectiv 5 lei, astfel încât:

200 m + 100 n + 5 p = 1000 .... 1p

Rezultă: 40 m + 20 n + p = 200 $\Rightarrow$ p $\in$ {10, 20, 30} 1p

1.

p = 10 $\Rightarrow$ 4 m + 2 n = 19 (fals)

p = 30 $\Rightarrow$ 4 m + 2 n = 17 (fals) 1p

2.

p = 20 $\Rightarrow$ 2 m + n = 9 $\Rightarrow$ n $\in$ {1, 3}.. 1p

Dacă n = 1 $\Rightarrow$ m = 4 (fals)

Dacă n = 3 $\Rightarrow$ m = 3 (fals) 1p

Răspunsul este afirmativ, întrucât avem: 200 · 3 + 100 · 3 + 5 · 20 = 1000 .... 1p

b) Cu aceleaşi notații ar trebui să avem: 200·m + 100·n + 5·p = 842 $\Rightarrow$5· (40·m + 20·n + p) = 842 (fals). Aşadar, casierița nu poate plăti 842 lei în condițiile date 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Un pensionar şi-a făcut un depozit la o bancă depunând 10000 lei, depozit scadent la 3 luni cu prelungire automată şi cu rata anuală unitară a dobânzii de 20%.
a) Ce sumă avea în cont după 3 luni? Dar după 6 luni?
b) Ştiind că un prieten a depus tot 10000 lei (depozit scadent la un an) în acelaşi timp cu el, dar la altă bancă şi ambii au scos după un an aceeaşi sumă de bani, să se afle rata anuală a dobânzii pentru cel din urmă.

Soluţie:

a) După trei luni: $10000\cdot\left(1+\frac{20\%}{4}\right)=10000\cdot 1{,}05=10500$ lei 2p

După şase luni: $10000\cdot\left(1+\frac{20\%}{4}\right)^2=10000\cdot 1{,}05^2=11025$ lei 2p

b) $10000\cdot\left(1+\frac{20\%}{4}\right)^4=10000\cdot(1+r)$ 2p

$1{,}05^4=1+r\Rightarrow r=0{,}21550625$, $r\cong 21{,}55\%$ 1p

2. Pentru evaluarea rezultatelor obţinute la teza la matematică de către elevii unei şcoli se face un sondaj de volum 35 printre elevii şcolii, notele fiind înregistrate în tabelul alăturat.

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Frecvenţa (Nr. elevi)	4	6	7	8	5	3	2

a) Reprezentaţi datele prin bare.
b) Calculaţi: media, dispersia şi mediana pentru selecţia considerată.

Soluţie:

a) Reprezentare cu bare 2p

b) $m=\frac{1}{35}(4\cdot 4+5\cdot 6+6\cdot 7+7\cdot 8+8\cdot 5+9\cdot 3+10\cdot 2)\simeq 6{,}6$ 2p

$\sigma^2\simeq\frac{1}{35}\left(4\cdot 2{,}7^2+6\cdot 1{,}7^2+7\cdot 0{,}7^2+8\cdot 0{,}3^2+5\cdot 1{,}3^2+3\cdot 2{,}3^2+2\cdot 3{,}3^2\right)=\frac{1}{35}\cdot 96{,}74=2{,}764$ 2p

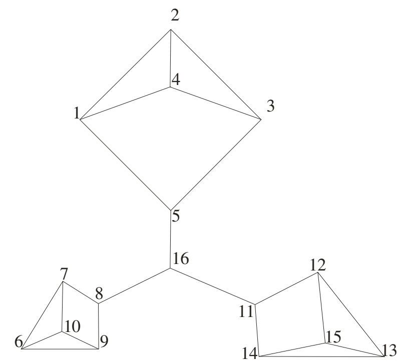
Calcul mediană 1p

3. Se consideră graful din figura alăturată :

a) Arătați că graful este regulat.

b) Dați un exemplu de ciclu elementar cu 3, 4, 5 muchii.

c) Să se afle numărul de cicluri elementare (două cicluri sunt diferite dacă diferă măcar printr-o muchie).



Soluție:

a) Calculează $d_G(v) = 3, \forall v \Rightarrow$ graf regulat 2p

b) (1241), (12351), (124351) sau orice alt exemplu corect .... (3×1) 3p

c) Orice ciclu elementar nu conține vârful 16 şi avem:

(1241), (2342) cu 3 muchii

(12351), (12341), (14351) cu 4 muchii

(124351), (142351) cu 5 muchii. Deci, în total, 7x3 = 21 cicluri. 2p

4. Dintr-o urnă cu 15 bile numerotate de la 1 la 15 se extrage la întâmplare o bilă. Se cere probabilitatea ca numărul înscris pe bila extrasă să fie:

a) un număr par;

b) un număr prim;

c) un număr divizibil cu 3.

Soluție:

Numărul cazurilor posibile pentru fiecare caz este acelaşi, şi anume 15 ....1p

a) Număr cazuri favorabile 7 (numerele: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14), $P_1 = \frac{7}{15} = 0,4(6)$ 2p

b) Număr cazuri favorabile 6 (numerele: 2, 3, 5, 7, 11, 13), $P_2 = \frac{6}{15} = 0,4$ 2p

c) Număr cazuri favorabile 5 (numerele: 3, 6, 9, 12, 15), $P_3 = \frac{5}{15} = 0,3(3)$ 2p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEŢEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Se consideră matricele: $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Demonstraţi că $A^4=B^3$.
b) Calculaţi $AB-BA+C$.
c) Determinaţi matricea X astfel încât $AX+XB=I_2$.

Soluţie:

a) $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow A^4=I_2$ 1p

$B^2=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow B^3=I_2$ 1p

b) $AB-BA+C=I_2$ 2p

c) $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ 1p

$AX+XB=\begin{pmatrix}c-b & a-b+d\\ -a-d & -b+c-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Obţine $X=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 1p

2. Avem o foaie de hârtie pe care în prima etapă o împărţim în 5 bucăţi. În a doua etapă, una dintre aceste bucăţi este din nou împărţită în alte 5 bucăţi. Apoi, în a treia etapă, una din bucăţile obţinute în etapa a doua, este împărţită în 5 bucăţi. Acest procedeu se repetă de mai multe ori după aceeaşi regulă.

a) Câte bucăţi de hârtie se obţin: în a doua etapă, a treia etapă, a patra etapă?
b) După repetarea acestui procedeu de mai multe ori, Claudiu şi Cristina au numărat pe rând bucăţile obţinute. Claudiu a spus că sunt 2012 bucăţi, iar Cristina a spus că sunt 2013 bucăţi. Cine a numărat corect?

Soluţie:

În a doua etapă se obţin $4+5=9$ bucăţi 1p
În a treia etapă se obţin $8+5=13$ bucăţi 1p
În a patra etapă se obţin $12+5=17$ bucăţi 1p
În fiecare etapă numărul de bucăţi de hârtie creşte cu 4 .... 1p
Cum iniţial am avut o foaie de hârtie, după n etape se vor obţine $(1+4n)$ bucăţi 2p
Cum $2012=4\cdot 503$ şi $2013=1+4\cdot 503\Rightarrow$ Cristina a numărat corect 1p

3. Într-un reper cartezian ortogonal (XOY) se consideră punctele A(2,3), B(2m+1,2) şi C(3,2m+2), m fiind un număr real.

a) Demonstraţi că aria triunghiului ABC este $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left[(2m-1)^2+1\right]$.

b) Determinaţi m pentru care aria triunghiului ABC este minimă.

Soluţie:

a) $S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot|\Delta|$; $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2m+1 & 2 & 1 \\ 3 & 2m+2 & 1 \end{vmatrix}$ 2p

$\Delta = 4m^2 - 4m + 2$ 2p

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left[(2m-1)^2+1\right]$ 1p

b) $S_{min} = \frac{1}{2}$ pentru $m = \frac{1}{2}$ 2p

4. Fie a, b, c, x, y cinci numere întregi şi matricea $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & x \\ y & 0 & c \end{pmatrix}$.

Doi elevi, Teodor şi Octavian, joacă următorul joc:
Teodor dă o valoare lui a, apoi Octavian dă o valoare lui x.
După aceea, Teodor dă o valoare lui b şi apoi Octavian dă o valoare lui y.
În final, Teodor dă o valoare lui c.
Câştigă Teodor numai dacă $|\det M| = 1$.

Precizaţi tripletele (a, b, c) care asigură victoria lui Teodor, oricare ar fi alegerile făcute de Octavian.

Soluţie:

detM = bc + axy 2p

Teodor câştigă dacă şi numai dacă $|bc + axy| = 1$ 1p

Pentru ca Teodor să câştige pentru orice x şi y, rezultă a = 0 .... 2p

Deci $|bc| = 1$ de unde:

(a, b, c) ∈ {(0, -1, -1); (0, -1, 1); (0, 1, -1); (0, 1, 1)} 2p